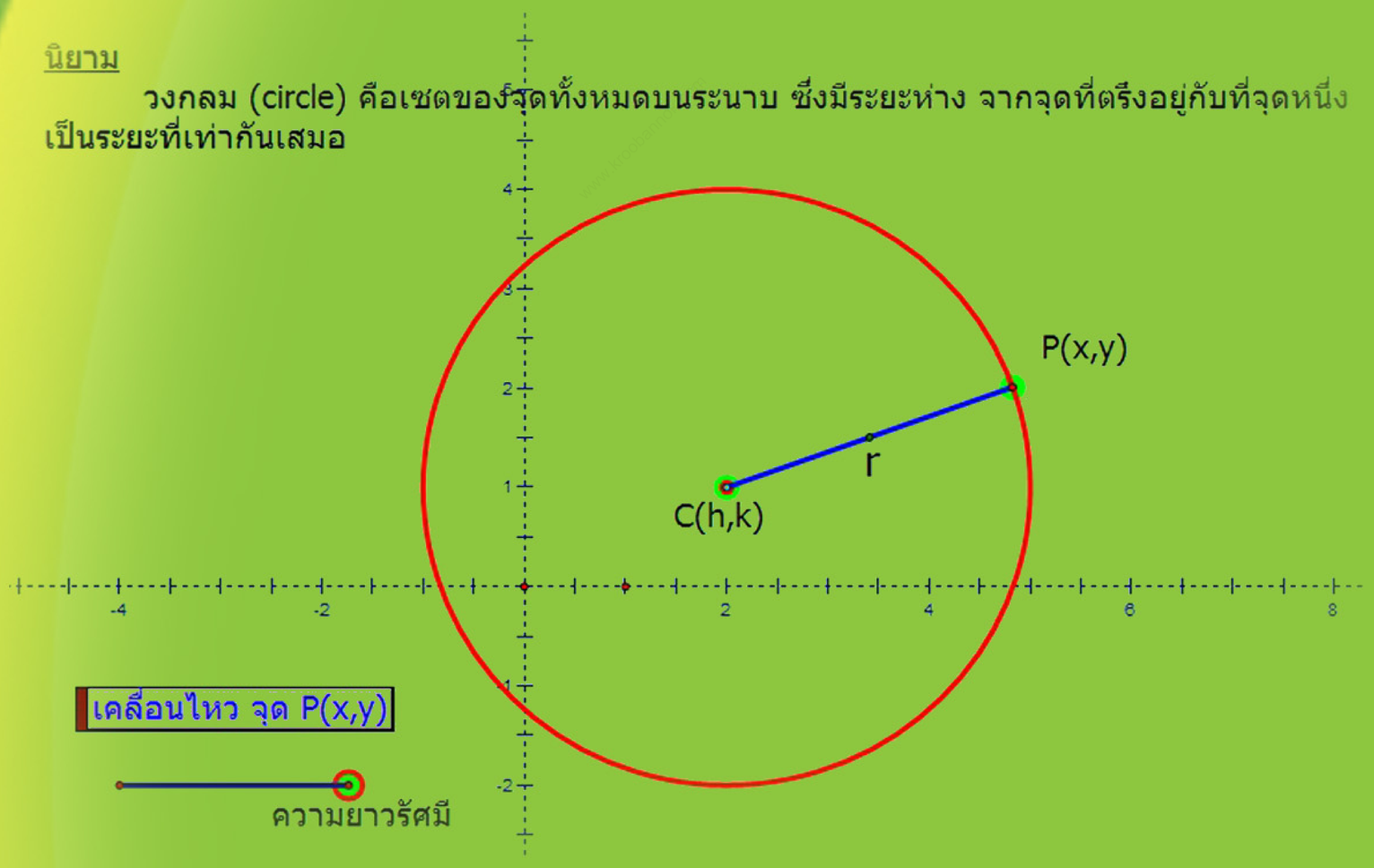
คู่มือการใช้ชุดกิจกรรม เรื่อง ภาคตัดกรวย
โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชุดกิจกรรมที่ 2
เรื่อง วงกลม

นิยาม

วงกลม (circle) คือเซตของจุดทั้งหมดบนระนาบ ซึ่งมีระยะห่าง จากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่ง เป็นระยะที่เท่ากันเสมอ



โรงเรียนคีรีมาศพิทยาคม
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 38

จัดทำโดย นายวุฒิพงษ์ มาลา

คำนำ

ชุดกิจกรรมเรื่องภาคตัดกรวย โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดทำเพื่อพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนได้ศึกษาชุดกิจกรรมพร้อมกับใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำรวจสืบเสาะหาองค์ความรู้ด้วยตนเองตามความสามารถของแต่ละบุคคลตามลำดับขั้นตอนในชุดกิจกรรม ซึ่งโปรแกรมนี้จะช่วยให้นักเรียนเห็นภาคตัดกรวยเป็นรูปธรรมอย่างชัดเจนนำไปสู่การวิเคราะห์แก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น และฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาตามตัวอย่างจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยครูเป็นผู้ชี้แนะแนวทาง

ผู้จัดทำหวังว่านักเรียนสามารถเข้าใจสาระสำคัญ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับภาคตัดกรวย สามารถใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad พัฒนาการเรียนรู้ ฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น และพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนให้สูงขึ้น

นายวุฒิพงษ์ มาลา
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

www.kroobanrok.com

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
รายละเอียดหน่วยการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค31202	1
ส่วนประกอบชุดการสอน	1
ชุดการสอนที่ 2 วงกลม (circle)	3
1. คำชี้แจง	3
2. ขั้นตอนการใช้ชุดการสอน	3
3. บทบาทของนักเรียน	3
4. จุดประสงค์	3
5. สาระสำคัญ	4
6. เนื้อหา	4
6.1 นิยามและความสัมพันธ์ของวงกลม	5
- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1 เรื่องนิยามและความสัมพันธ์ของวงกลม	7
6.2 สมการของวงกลมในรูปทั่วไป	10
- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 2 เรื่องสมการของวงกลมในรูปทั่วไป	15
6.3 ฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad	19
- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 3 เรื่องฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad	26
บรรณานุกรม	29

www.krooban0k.com

รายละเอียดหน่วยการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค31202

หน่วยการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรสถานศึกษา พุทธศักราช 2553 โรงเรียนคีรีมาศพิทยาคม มีเนื้อหา สาระองค์ความรู้คณิตศาสตร์ มาตรฐาน ผลการเรียนรู้ ดังนี้

เนื้อหา

หน่วยการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย มีเนื้อหาอยู่ 5 เรื่อง ดังนี้

1. การเลื่อนแกนทางขนาน (transtation of axis)
2. วงกลม (circle)
3. พาราโบลา (parabola)
4. วงรี (ellipse)
5. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค3.2 ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

ผลการเรียนรู้

1. เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นภาคตัดกรวย เมื่อกำหนดส่วนต่างๆ ของภาคตัดกรวยให้ และเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้นได้
2. นำความรู้เรื่องการเลื่อนแกนทางขนานไปใช้ในการเขียนกราฟได้
3. นำความรู้เรื่องภาคตัดกรวยไปใช้แก้ปัญหาได้

ส่วนประกอบชุดกิจกรรม

ชุดกิจกรรมเรื่องภาคตัดกรวย โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีองค์ประกอบหลัก 3 ส่วน ดังนี้

1. คู่มือชุดกิจกรรมสำหรับครู จำนวน 1 เล่ม ประกอบด้วย

1.1 ข้อมูลพื้นฐาน ประกอบด้วย รายละเอียดวิชา คำชี้แจงสำหรับครู ขั้นตอนการใช้ชุดกิจกรรม บทบาทครู สิ่งที่ครูต้องเตรียม บทบาทนักเรียน

1.2 แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องภาคตัดกรวย จำนวน 6 แผน ดังนี้

1.2.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องการเลื่อนแกนทางขนาน (transtation of axis)	3 ชั่วโมง
1.2.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องวงกลม (circle)	3 ชั่วโมง
1.2.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องพาราโบลา (parabola)	3 ชั่วโมง
1.2.4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องวงรี (ellipse)	3 ชั่วโมง
1.2.5 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องไฮเพอร์โบลา (hyperbola)	3 ชั่วโมง
1.2.6 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 เรื่องโจทย์ปัญหาภาคตัดกรวย	3 ชั่วโมง

1.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคตัดกรวย มี 2 ชุด ดังนี้

1.3.1 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ก่อนเรียน เป็นแบบทดสอบเลือกตอบ 30 ข้อ 30 คะแนน เวลาในการทำข้อสอบ 90 นาที

www.kroobannok.com

1.3.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังเรียน เป็นแบบทดสอบเลือกตอบ 30 ข้อ 30 คะแนน เวลาในการทำข้อสอบ 90 นาที

2. คู่มือชุดกิจกรรมสำหรับนักเรียน จำนวน 6 เล่ม ดังนี้

2.1 ชุดกิจกรรมที่ 1 เรื่องการเลื่อนแกนทางขนาน (transtation of axis) 3 ชั่วโมง
2.2 ชุดกิจกรรมที่ 2 เรื่องวงกลม (circle) 3 ชั่วโมง
2.3 ชุดกิจกรรมที่ 3 เรื่องพาราโบลา (parabola) 3 ชั่วโมง
2.4 ชุดกิจกรรมที่ 4 เรื่องวงรี (ellipse) 3 ชั่วโมง
2.5 ชุดกิจกรรมที่ 5 เรื่องไฮเพอร์โบลา (hyperbola) 3 ชั่วโมง
2.6 ชุดกิจกรรมที่ 6 เรื่องโจทย์ปัญหาภาคตัดกรวย 3 ชั่วโมง

ในแต่ละชุดกิจกรรมจะมีส่วนประกอบ คือ รายละเอียดหน่วยการเรียน ส่วนประกอบชุดกิจกรรม คำชี้แจง ขั้นตอนการใช้ชุดกิจกรรม บทบาทของนักเรียน จุดประสงค์ สาระสำคัญ เนื้อหา แบบฝึกหัดระหว่างเรียน

3. สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่องภาคตัดกรวย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ชื่อไฟล์ GSP_Conic ประกอบด้วยสื่อการสอน 20 หน้า ดังนี้

3.1 การเลื่อนแกนทางขนาน
3.2 วงกลม
3.3 องค์ประกอบของพาราโบลา
3.4 พาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) แกนสมมาตรขนานแกน Y
3.5 พาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) แกนสมมาตรขนานแกน X
3.6 พาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) แกนสมมาตรขนานแกน Y
3.7 พาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) แกนสมมาตรขนานแกน X
3.8 องค์ประกอบของวงรี
3.9 วงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) แกนเอกขนานแกน X
3.10 วงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) แกนเอกขนานแกน Y
3.11 การเลื่อนแกนทางขนานของวงรี
3.12 วงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) แกนเอกขนานแกน X
3.13 วงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) แกนเอกขนานแกน Y
3.14 องค์ประกอบของไฮเพอร์โบลา
3.15 ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a,b และ c ของไฮเพอร์โบลา
3.16 ไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) แกนตามขวางขนานแกน X
3.17 ไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) แกนตามขวางขนานแกน Y
3.18 การเลื่อนแกนทางขนานของไฮเพอร์โบลา
3.19 ไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) แกนตามขวางขนานแกน X
3.20 ไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) แกนตามขวางขนานแกน Y

www.kruboatnok.com

ชุดกิจกรรมที่ 2
เรื่อง วงกลม (circle)

1. คำชี้แจง

1.1 ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนการใช้ชุดกิจกรรม

1.2 แบบฝึกหัดระหว่างเรียน เป็นแบบเขียนตอบ คะแนนเต็ม 60 คะแนน

- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1 จำนวน 20 คะแนน
- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 2 จำนวน 20 คะแนน
- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 3 จำนวน 20 คะแนน

1.3 แบบทดสอบย่อยหลังเรียนชุดกิจกรรม ใช้ทดสอบนักเรียนหลังเรียนชุดกิจกรรมที่ 2 เป็นแบบทดสอบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก 10 ข้อ 10 คะแนน เวลาในการทำแบบทดสอบ 30 นาที

2. ขั้นตอนการใช้ชุดกิจกรรม

2.1 ชุดกิจกรรมเรื่องภาคตัดกรวยนี้ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อประกอบในการเรียนเพื่อให้นักเรียนเห็นเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวยเป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น ให้นักเรียนอ่านรายละเอียดชุดวิชา ส่วนประกอบชุดกิจกรรม คำชี้แจง ขั้นตอนการใช้ชุดกิจกรรม บทบาทนักเรียน จุดประสงค์ สาระสำคัญ และเนื้อหาในในชุดกิจกรรม

2.2 ปฏิบัติตามขั้นตอนและทำกิจกรรมในชุดกิจกรรม ประกอบกับใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ชื่อไฟล์ GSP_Conic เป็นสื่อประกอบการเรียนในแต่ละชุดกิจกรรม

2.3 ให้นักเรียนประจำเครื่องคอมพิวเตอร์ และปฏิบัติตามขั้นตอนและทำกิจกรรมในชุดกิจกรรม

2.4 หากนักเรียนมีปัญหาในการเรียนสามารถยกมือสอบถามกับครูได้

2.5 เมื่อนักเรียนคนใดที่ปฏิบัติตามขั้นตอนในชุดกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้ทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนด้วยตนเอง เมื่อมีปัญหาให้ปรึกษาครู หรือเพื่อนที่ทำได้

2.6 ผลการทดสอบย่อยหลังเรียนชุดกิจกรรมนั้นๆ ถ้าผลการทดสอบไม่ผ่านให้นักเรียนย้อนกลับไปปฏิบัติตามขั้นตอนในเอกสารชุดกิจกรรมจนกว่าผลการทดสอบย่อยหลังเรียนชุดกิจกรรมจะผ่านเกณฑ์ ร้อยละ 70

3. บทบาทของนักเรียน

3.1 นักเรียนต้องตระหนักถึงความสำคัญในการเรียนรู้ด้วยตนเอง

3.2 นักเรียนศึกษาความรู้เรื่องภาคตัดกรวยตามลำดับขั้นตอนในคู่มือชุดกิจกรรมสำหรับนักเรียน

3.3 เมื่อเริ่มเรียนชุดกิจกรรม หากนักเรียนมีปัญหาในการเรียนสามารถยกมือสอบถามกับครูได้

3.4 นักเรียนต้องเรียนด้วยความตั้งใจ ไม่ส่งเสียงดังรบกวนเพื่อนในเวลาเรียน

3.5 นักเรียนต้องเป็นผู้ที่มีความซื่อสัตย์ ไม่คัดลอกคำตอบจากเพื่อน หรือจากเฉลย

3.6 นักเรียนสามารถทบทวนเนื้อหาได้

4. จุดประสงค์

4.1 นักเรียนสามารถบอกนิยามของวงกลมได้

4.2 นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมเมื่อกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ให้ได้

5. สาระสำคัญ

กำหนดให้ h, k, r, A, B และ C เป็นจำนวนจริงใดๆ

5.1 ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) มีรัศมียาว r หน่วย

คือ $\{(x,y) \in R \times R / (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) มีรัศมียาว r หน่วย

คือ $\{(x,y) \in R \times R / x^2 + y^2 = r^2\}$

5.2 สมการในรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เมื่อจัดสมการอยู่ในรูปมาตรฐาน $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ เป็นสมการวงกลมหรือไม่ให้พิจารณาค่าของ r^2

พิจารณา ถ้า $r^2 > 0$ แสดงว่า เป็นสมการวงกลม

ถ้า $r^2 < 0$ แสดงว่าไม่มีค่า x และ y ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง (ไม่มีกราฟ)

ถ้า $r^2 = 0$ แสดงว่ามีค่า x และ y เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง (มีกราฟเป็นจุด)

6. เนื้อหา

6.1 นิยามและความสัมพันธ์ของวงกลม

- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1 เรื่อง นิยามและความสัมพันธ์ของวงกลม

6.2 สมการของวงกลมในรูปทั่วไป

- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 2 เรื่อง สมการของวงกลมในรูปทั่วไป

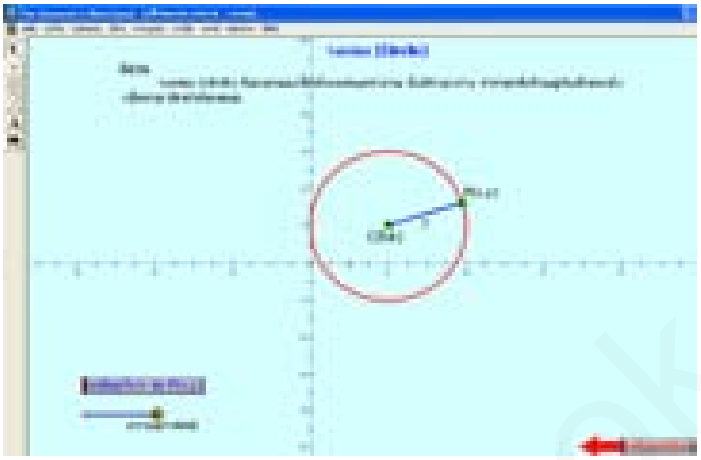
6.3 ฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

- แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 3 เรื่อง ฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

www.krooaanon.com

6.1 นิยามและความสัมพันธ์ของวงกลม

1. เปิดไฟล์ชื่อ *GSP_Conic* โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad
2. เลือกเมนู *วงกลม* จะปรากฏหน้าต่างโปรแกรม ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

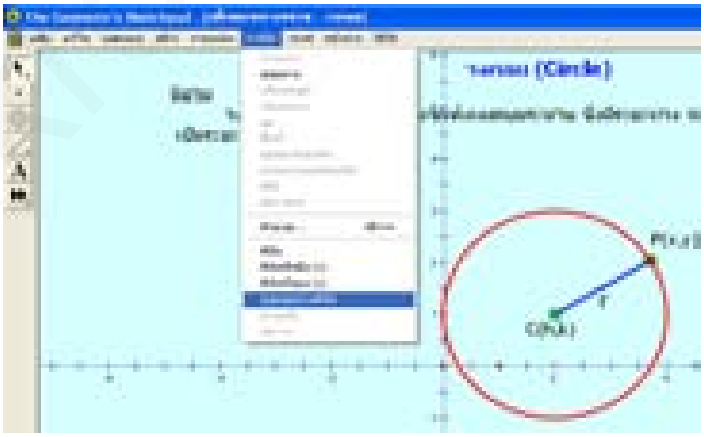
3. นักเรียนศึกษานิยามและลักษณะองค์ประกอบของวงกลม

จุดที่ตรึงอยู่กับที่ หมายถึงจุด ..... เรียกว่าจุดศูนย์กลาง

ระยะห่างที่เท่ากัน หมายถึง ส่วนของเส้นตรง..... เรียกว่ารัศมี

จุดใดๆ หมายถึงจุด .....

4. วัดความยาวรัศมี โดยคลิกเลือก *จุด C(h,k)* และ *จุด P(x,y)* แล้วคลิก เมนู *การวัด* เลือก *ระยะระหว่างพิกัด* จะได้ความยาวรัศมีของวงกลม เท่ากับ .....หน่วย



รูปที่ 2

5. คลิกปุ่ม *เคลื่อนไหวจุด P(x,y)* สังเกตความยาวรัศมีของวงกลม

ผลการสังเกต.....

.....

.....

6. กำหนดให้จุด C มีพิกัด (h,k) จุด P มีพิกัด (x,y) จากความรู้ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

$PC = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

.....

.....

.....

$PC^2 =$.....

เนื่องจาก PC คือรัศมีวงกลม แทนด้วย r

ดังนั้น $r^2 =$ .....

<u>สรุป</u>

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) มีรัศมียาว r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R \times R / .....\}$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) มีรัศมียาว r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R \times R / .....\}$

www.kroobannok.com

แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1
เรื่อง นิยามและความสัมพันธ์ของวงกลม

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คะแนนเต็ม 20 คะแนน

1. จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมเมื่อกำหนดจุดศูนย์กลาง และรัศมี ดังต่อไปนี้ (ข้อละ 2 คะแนน)

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) รัศมียาว 2 หน่วย

วิธีทำ

จากสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

แทนค่า $(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$

จะได้ $x^2+y^2=4$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม

คือ $\{(x,y)\in R\times R/\ x^2+y^2=4\}$

1.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,3) รัศมียาว 4 หน่วย

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (5,−2) รัศมียาว 3 หน่วย

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (−2,−3) รัศมียาว 2 หน่วย

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.5 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3,−4) รัศมียาว 5 หน่วย

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.6 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ รัศมียาว $\frac{1}{\sqrt{5}}$ หน่วย

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

www.krooban.com

1.7 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ รัศมียาว $\frac{1}{\sqrt{3}}$ หน่วย

วิธีทำ

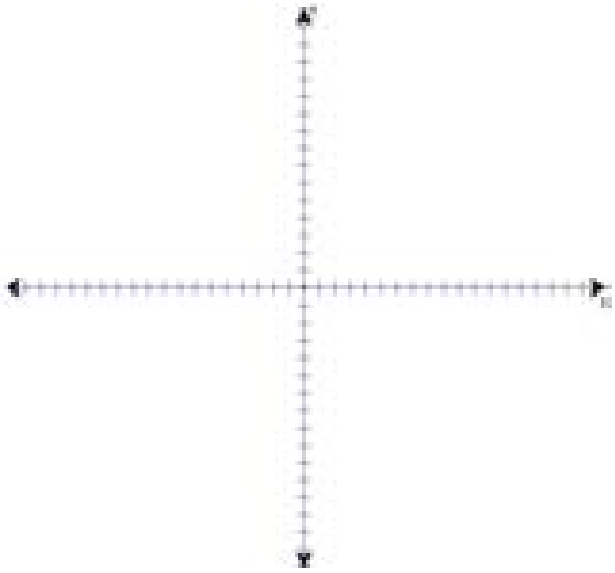
1.8 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ รัศมียาว 1 หน่วย

วิธีทำ

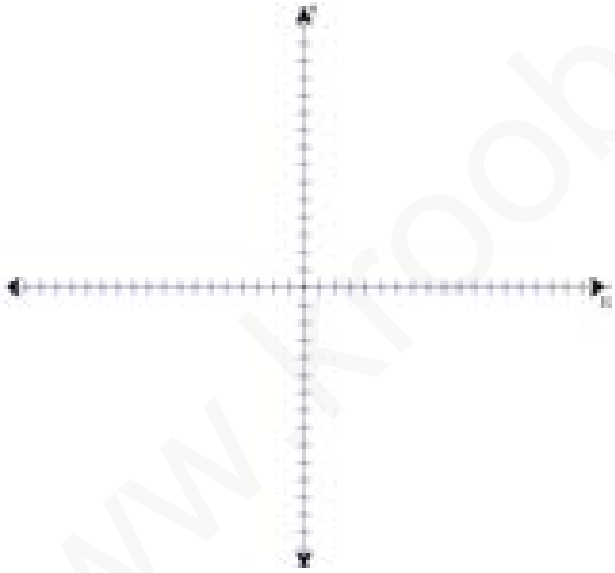
www.kroobannok.com

2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน)

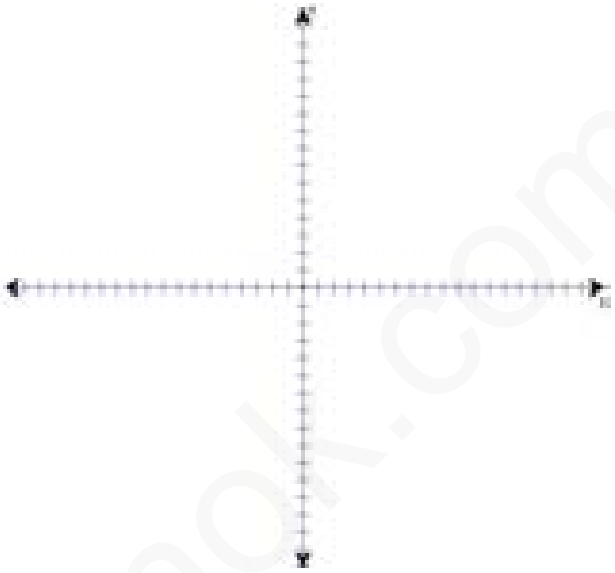
2.1 $\{(x,y)\in R\times R/x^2+y^2=16\}$



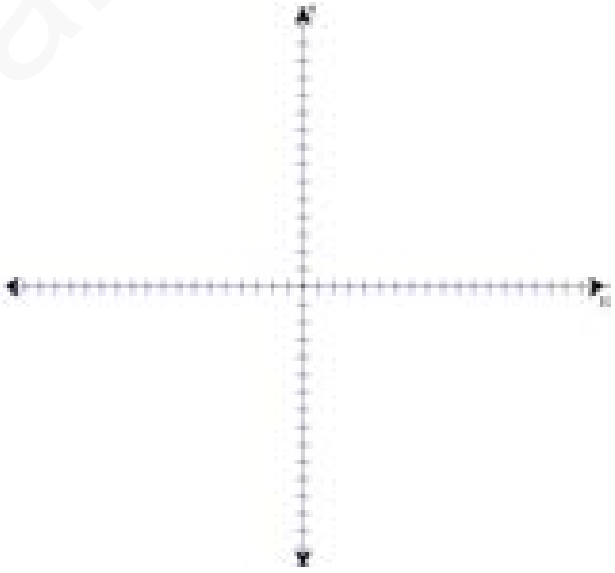
2.2 $\{(x,y)\in R\times R/x^2+y^2=10\}$



2.3 $\{(x,y)\in R\times R/(x-1)^2+y^2=25\}$



2.4 $\{(x,y)\in R\times R/(x+2)^2+(y-3)^2=16\}$



www.kroobanok.com

6.2 สมการของวงกลมในรูปทั่วไป

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) มีรัศมี r หน่วย มีสมการในรูปมาตรฐานคือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ถ้านำพจน์ที่อยู่ในรูปกำลังสองมากระจาย สมการดังกล่าวจะอยู่ในรูป $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ โดยที่ A,B และ C เป็นจำนวนจริงใดๆ เรียกสมการดังกล่าวว่า **สมการวงกลมในรูปทั่วไป**

ข้อสังเกต

สมการในรูปทั่วไป $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ เมื่อจัดสมการอยู่ในรูป $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

พิจารณา ถ้า $r^2>0$ แสดงว่า เป็นสมการวงกลม

ถ้า $r^2=0$ หรือ $r^2<0$ แสดงว่า ไม่เป็นสมการวงกลม

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $x^2+y^2-4x+6y-10=0$ เป็นสมการวงกลม

วิธีทำ

จัดสมการ $x^2+y^2-4x+6y-10=0$ ใช้หลักการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จะได้ $x^2-4x+y^2+6y-10=0$

$$x^2-2(2)x+2^2-2^2+y^2+2(3)y+3^2-3^2-10=0$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2-4-9-10=0$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=23$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=(\sqrt{23})^2$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $r^2=23$ ซึ่ง $r^2>0$ แสดงว่าสมการตามโจทย์เป็นสมการวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด (2,3) และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{23}$

เขียนกราฟตรวจคำตอบใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างกราฟ $x^2+y^2-4x+6y-10=0$

1.1 จัดสมการ $x^2+y^2-4x+6y-10=0$ ให้อยู่ในเทอมของ x ดังนี้

$$(x-2)^2+(y+3)^2=23$$

$$y=\pm\sqrt{23-(x-2)^2}-3$$

1.2 คลิกเมนู *กราฟ* เลือก *เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่*

1.3 ที่หน้าต่างของ *ฟังก์ชันใหม่* พิมพ์ “*sqrt(23 – (x-2)^2) – 3* ” แล้วคลิก *ตกลง*

1.4 ที่หน้าต่างของ *ฟังก์ชันใหม่* พิมพ์ “*- sqrt(23 – (x-2)^2) – 3* ” แล้วคลิก *ตกลง*

2. สังเกตกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นวงกลมหรือไม่

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $x^2+y^2-2x-8=0$ เป็นสมการวงกลม

วิธีทำ

จัดสมการ $x^2+y^2-2x-8=0$ ใช้หลักการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จะได้ $x^2-2x+y^2-8=0$

$$x^2-2(1)x+1^2-1^2+y^2-8=0$$

$$(x-1)^2+y^2-1-8=0$$

$$(x-1)^2+y^2=9$$

$$(x-1)^2+y^2=3^2$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $r^2=9$ ซึ่ง $r^2>0$ แสดงว่าสมการตามโจทย์เป็นสมการวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด (1,0) และรัศมีเท่ากับ 3

เขียนกราฟตรวจคำตอบใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างกราฟ $x^2+y^2-2x-8=0$
   1.1 จัดสมการ $x^2+y^2-2x-8=0$ ให้อยู่ในเทอมของ x ดังนี้

$$(x-1)^2+y^2=9$$

$$y=\pm\sqrt{9-(x-1)^2}$$

   1.2 คลิกเมนู *กราฟ* เลือก *เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่*
   1.3 ที่หน้าต่างของ *ฟังก์ชันใหม่* พิมพ์ “*sqrt(9 – (x-1)^2)* ” แล้วคลิก *ตกลง*
   1.4 ที่หน้าต่างของ *ฟังก์ชันใหม่* พิมพ์ “*- sqrt(9 – (x-1)^2)*” แล้วคลิก *ตกลง*
2. สังเกตกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นวงกลมหรือไม่

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $x^2+y^2-2x+4y+100=0$ เป็นสมการวงกลมหรือไม่

วิธีทำ

จัดสมการ $x^2+y^2-2x+4y+100=0$ ใช้หลักการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จะได้ $x^2-2x+y^2+4y+100=0$

$$x^2-2(1)x+1^2-1^2+y^2+2(2)y+2^2-2^2+100=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2-1-4+100=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=-95$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $r^2=-95$ ซึ่ง $r^2<0$ แสดงว่าสมการตามโจทย์**ไม่เป็นสมการวงกลม**

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $x^2+y^2+8x-6y+25=0$ เป็นสมการวงกลมหรือไม่

วิธีทำ

จัดสมการ $x^2+y^2+8x-6y+25=0$ ใช้หลักการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จะได้ $x^2+8x+y^2-6y+25=0$

$$x^2+2(4)x+4^2-4^2+y^2-2(3)y+3^2-3^2+25=0$$

$$(x+4)^2+(y-3)^2-16-9+25=0$$

$$(x+4)^2+(y-3)^2=0$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $r^2=0$ แสดงว่าสมการตามโจทย์**ไม่เป็นสมการวงกลม**

ข้อสังเกต

การจะพิจารณาว่าสมการใดเป็นสมการวงกลมหรือไม่ เราต้องจัดสมการดังกล่าวอยู่ในรูปสมการมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ หลังจากนั้นพิจารณาค่าของ r^2

พิจารณา ถ้า $r^2>0$ แสดงว่า เป็นสมการวงกลม

ถ้า $r^2<0$ แสดงว่าไม่มีค่า x และ y ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง (ไม่มีกราฟ)

ถ้า $r^2=0$ แสดงว่ามีค่า x และ y เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง (มีกราฟเป็นจุด)

วิธีหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมอย่างรวดเร็วจากสมการในรูปทั่วไป $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ พิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้

จากสมการ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$$x^2+2\left(\frac{A}{2}\right)x+\left(\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+2\left(\frac{B}{2}\right)y+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2+C=0$$

$$x^2+2\left(\frac{A}{2}\right)x+\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+2\left(\frac{B}{2}\right)y+\left(\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$$

จะเห็นได้ว่าสมาการอยู่ในรูปมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางวงกลมคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ รัศมีคือ $\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C}$

www.krooobanok.com

วิธีลัดควรจำ

สมการวงกลมในรูปทั่วไป $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

จุดศูนย์กลางวงกลมคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ รัศมีคือ $\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C}$

ตัวอย่างที่ 5 จงพิจารณา $x^2+y^2-4y=0$ เป็นสมการวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี

วิธีทำ

จากสมการ $x^2+y^2-4y=0$

จะได้ $A=0,B=-4,C=0$

พิจารณา $r^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$

$=\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2-0$

$=4$

จะได้ $r^2>0$ แสดงว่า สมการ $x^2+y^2-4y=0$ เป็นสมการวงกลม

จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(-\frac{0}{2},-\frac{(-4)}{2}\right)$

$=(0,2)$

รัศมีคือ $\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C}=\sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2-0}$

$=2$

ตัวอย่างที่ 6 จงพิจารณา $x^2+y^2+6x-8y+24=0$ เป็นสมการวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม

วิธีทำ

จากสมการ $x^2+y^2+6x-8y+24=0$

จะได้ $A=6,B=-8,C=24$

พิจารณา $r^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$

$$=\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-24$$

$$=1$$

จะได้ $r^2>0$ แสดงว่า สมการ $x^2+y^2+6x-8y+24=0$ เป็นสมการวงกลม

จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(-\frac{6}{2},-\frac{(-8)}{2}\right)$

$$=(-3,4)$$

รัศมีคือ $\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C}=\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-24}$

$$=1$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงพิจารณา $x^2+y^2+4x-6y+13=0$ เป็นสมการวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $x^2+y^2+4x-6y+13=0$

จะได้ $A=4\ ,B=-6,C=13$

พิจารณา $r^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C$

$$=\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{2}\right)^2-13$$

$$=0$$

จะได้ $r^2=0$ แสดงว่า สมการ $x^2+y^2+4x-6y+13=0$ ไม่เป็นสมการวงกลม

พักเหนื่อยแล้วทำแบบฝึกหัดต่อนะครับ.....

www.krooban.com

แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 2
เรื่อง สมการของวงกลมในรูปทั่วไป

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คะแนนเต็ม 20 คะแนน

1. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม

1.1 $x^2+y^2+2x+1=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 $x^2+y^2-10x+4y+24=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.3 $2x^2+2x+2y^2-4y-10=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

www.kroobannok.com

1.4 $x^2-2x+y^2-4y-20=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

1.5 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

1.6 $x^2+y^2+4x+6y-3=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

www.kroobannok.com

1.7 $4x^2+4y^2-4x+4y+1=0$ (2 คะแนน)

วิธีทำ

2. จงหาค่า k ซึ่งทำให้สมการวงกลม $x^2+y^2+kx+2y+2=0$ เป็นสมการวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ $2\sqrt{2}$ หน่วย (2 คะแนน)

วิธีทำ

3. ถ้าสมการ $x^2+y^2-2x-6y+k=0$ เป็นสมการวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 4 หน่วย แล้วจงหาค่า k (2 คะแนน)

วิธีทำ

www.kroobannok.com

4. ถ้าสมการ $x^2+y^2+4x-2y+m=0$ เป็นสมการวงกลม แล้ว m ต้องมีค่าเป็นอย่างไร (2 คะแนน)

<u>วิธีทำ</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คิด ทำ ให้เต็มที่ >>> จะไปได้เต็มที่ >>>

www.kroobannok.com

6.3 ฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่พิกัด Q(2,−1) รัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

เขียนกราฟวงกลมใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้เพื่อให้เห็นวงกลมเป็นรูปธรรม

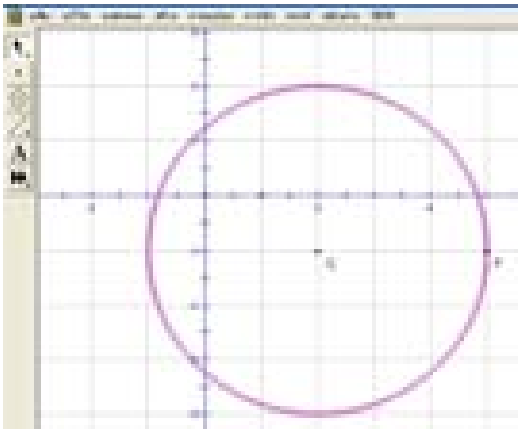
1. ลงจุด Q(2,−1) โดยคลิกที่เมนู *กราฟ* เลือก *ลงจุด* แล้วใส่พิกัด (2,−1) ดังรูปที่ 3

รูปที่ 3

2. ลงจุดใดๆ ที่อยู่ห่างจากจุด Q(2,−1) ระยะทาง 3 หน่วย ในที่นี้เลือกลงจุด P(5,−1) โดยคลิกที่เมนู *กราฟ* เลือก *ลงจุด* แล้วใส่พิกัด (5,−1) จากนั้นคลิก *วาด*

3. คลิกเลือก จุด Q และ P ตามลำดับจากนั้นที่เมนู *สร้าง* เลือก *วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น* จะได้วงกลม ดังรูปที่ 4 และรูปที่ 5

รูปที่ 4



รูปที่ 5

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการวงกลมคือ $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$

โจทย์กำหนดให้ $h=2$,$k=-1$ และ $r=3$

แทนค่าในสมการ $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$

จะได้ $3^2=(x-2)^2+(y+1)^2$

$9=x^2-4x+4+y^2+2y+1$

จัดสมการใหม่ได้ $x^2-4x+y^2+2y-4=0$

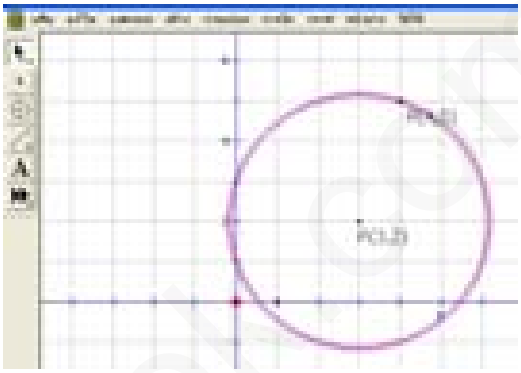
ดังนั้น สมการวงกลมคือ $x^2-4x+y^2+2y-4=0$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่พิกัด Q(3,2) และวงกลมผ่านจุด P(4,5)

เขียนกราฟวงกลมใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้เพื่อให้เห็นวงกลมเป็นรูปธรรม

1. ลงจุด Q(3,2) และ P(4,5) โดยคลิกที่เมนู *กราฟ* เลือก *ลงจุด* แล้วใส่พิกัด Q และ P ตามลำดับ
2. สร้างวงกลม โดยคลิกเลือกจุด Q(3,2) และ P(4,5) ตามลำดับแล้วที่เมนู *สร้าง* เลือก *วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น* จะได้ดังรูปที่ 7

รูปที่ 6



รูปที่ 7

<u>วิธีทำ</u>

ในการหาสมการวงกลมต้องทราบจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม จากโจทย์จุดศูนย์กลางคือจุด Q(3,2) ดังนั้นต้องหารัศมีของวงกลมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

จากรูปที่วาดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$r=\sqrt{(3-4)^2+(2-5)^2}$$

$$r=\sqrt{10}$$

จากสมการวงกลมคือ $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$

โจทย์กำหนดให้ โจทย์กำหนดให้ $h=3,k=2$ และ $r=\sqrt{10}$

แทนค่าในสมการ $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$

จะได้ $\sqrt{10}^2=(x-3)^2+(y-2)^2$

$$10=x^2-6x+9+y^2-4y+4$$

จัดสมการใหม่ได้ $x^2-6x+y^2-4y+3=0$

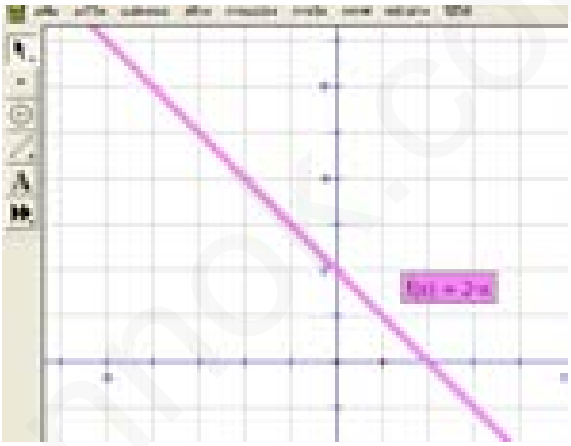
ดังนั้น สมการวงกลมคือ $x^2-6x+y^2-4y+3=0$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x และวงกลมนี้สัมผัสเส้นตรง $x+y-2=0$ ที่จุด $(4,-2)$

เขียนกราฟวงกลมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ ช่วยในการหาคำตอบ *(นักเรียนควรทราบว่า "รัศมีของวงกลมต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุดสัมผัสเสมอ")*

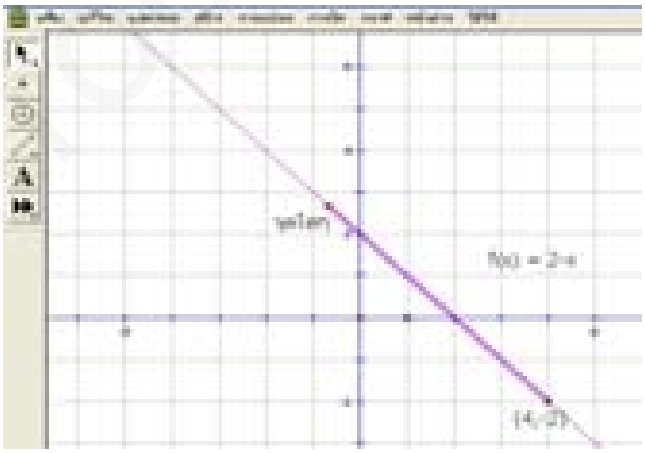
1. สร้างกราฟเส้นตรง $x+y-2=0$
   1.1 จัดสมการ $x+y-2=0$ ให้อยู่ในเทอมของ x ได้ $y=2-x$
   1.2 คลิกเมนู *กราฟ* เลือก *เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่*
2. ที่หน้าต่าง *ฟังก์ชันใหม่* พิมพ์ " *2 – x*" คลิก *ตกลง* จะได้กราฟ ดังรูปที่ 9

รูปที่ 8



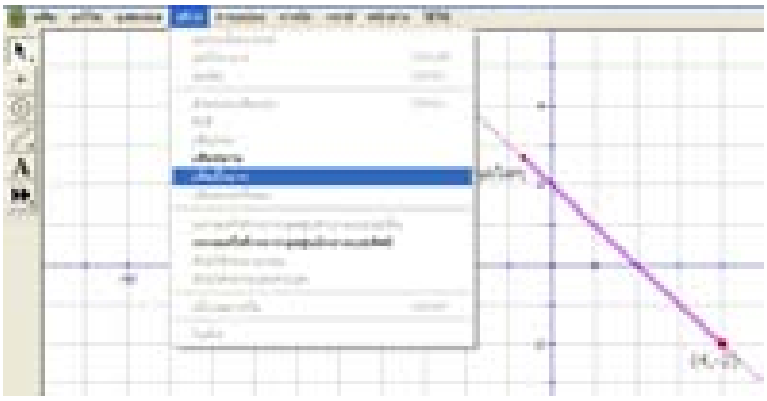
รูปที่ 9

3. ลงจุด $(4,-2)$ โดยคลิกที่เมนู *กราฟ* เลือก *ลงจุด* แล้วใส่พิกัด $(4,-2)$ คลิก *วาด*
4. ลงจุดใดๆ บนกราฟเส้นตรง $x+y-2=0$ แล้วสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดใดๆ กับจุด $(4,-2)$ ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10

5. สร้างเส้นตั้งฉากกับกราฟเส้นตรง $x+y-2=0$ ผ่านจุด $(4,-2)$ โดย
   5.1 คลิกเลือกจุด $(4,-2)$ และส่วนของเส้นตรง
   5.2 ที่เมนู *สร้าง* เลือก *เส้นตั้งฉาก* ดังรูปที่ 11

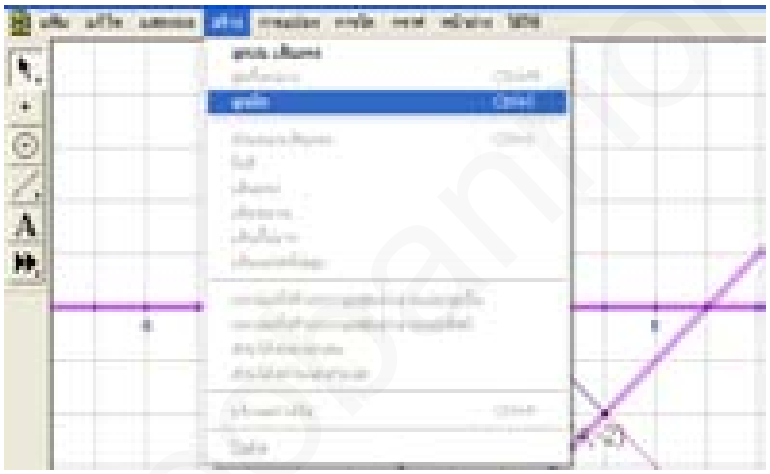


รูปที่ 11

6. สร้างจุดตัด C ระหว่างเส้นตั้งฉากกับแกน X โดย m

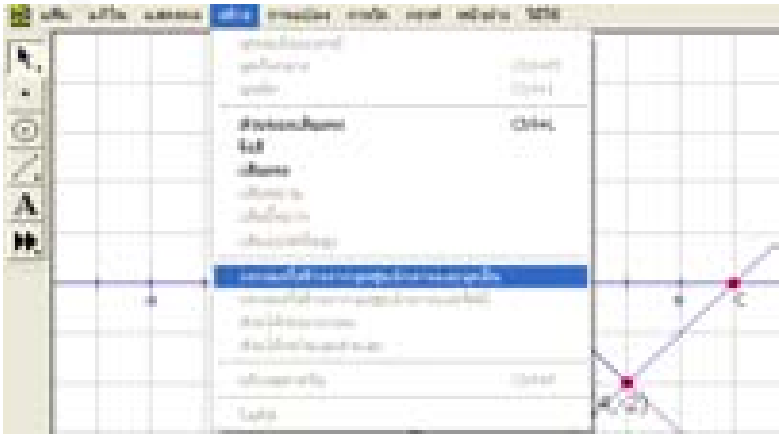
6.1 คลิกเลือกเส้นตั้งฉาก และแกน X

6.2 ที่เมนู *สร้าง* เลือก *จุดตัด* ดังรูปที่ 12



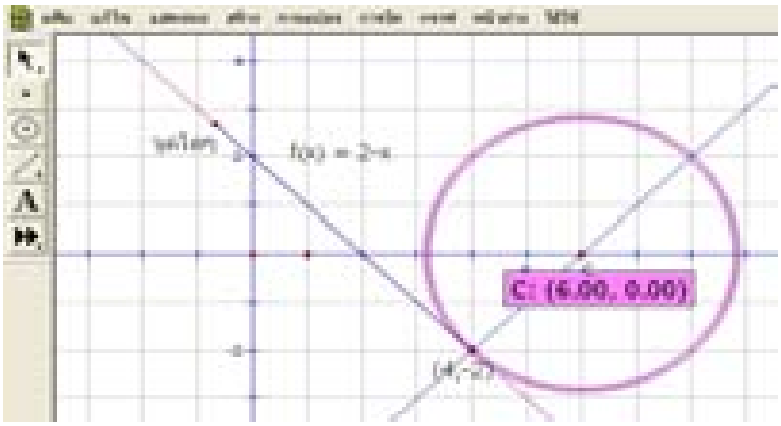
รูปที่ 12

7. สร้างวงกลมตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด โดยคลิกเลือกจุดตัด C และจุด $(4,-2)$ จากนั้นที่เมนู *สร้าง* เลือก *วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น* ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13

8. จะได้วงกลมตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด ดังรูปที่ 14 มีจุดศูนย์กลางที่จุด C(6,0)



รูปที่ 14

<u>วิธีทำ</u>

ในการหาสมการวงกลมต้องทราบจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม ดังนั้นต้องหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

จากรูปที่วาดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังรูปที่ 14

จุดศูนย์กลางวงกลมคือ จุด (6,0)

รัศมีวงกลม คือระยะระหว่างจุดศูนย์กลาง กับจุด (4,-2)

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$r = \sqrt{(6-4)^2 + (0+2)^2}$$

$$r = \sqrt{8}$$

จากสมการวงกลมคือ $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

จากโจทย์ $h = 6, k = 0$ และ $r = \sqrt{8}$

แทนค่าในสมการ $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

จะได้ $\sqrt{8}^2 = (x-6)^2 + (y-0)^2$

$$8 = x^2 - 12x + 36 + y^2$$

จัดสมการใหม่ได้ $x^2 - 12x + y^2 + 28 = 0$

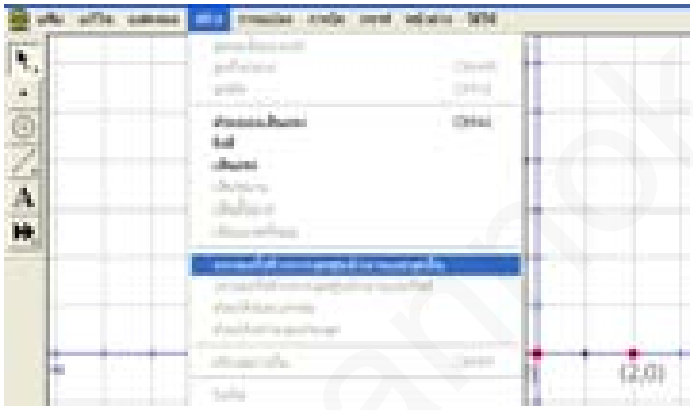
ดังนั้น สมการวงกลมคือ $x^2 - 12x + y^2 + 28 = 0$

www.kroobannok.com

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> ให้ L เป็นเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=4$ ที่จุด P และ A(2,3) เป็นจุดบนเส้นตรง L จงหาความยาวของ PA *(นักเรียนควรทราบว่า "รัศมีของวงกลมต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุดสัมผัสเสมอ")*

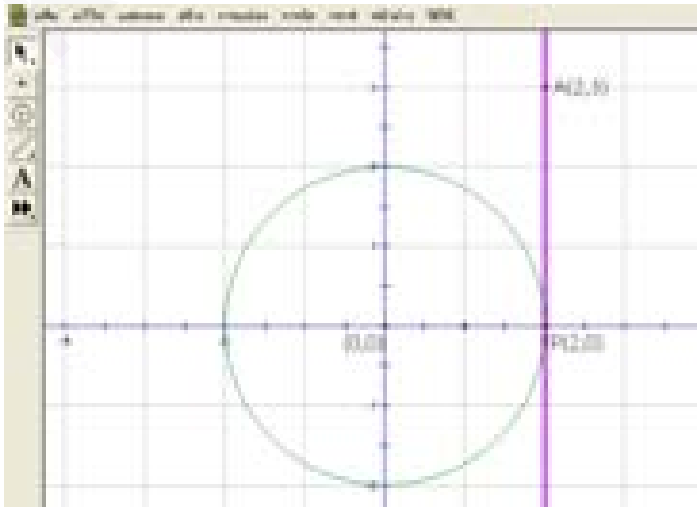
เขียนกราฟวงกลมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ ช่วยในการหาคำตอบ

1. สร้างกราฟวงกลม $x^2+y^2=4$ จากสมการวงกลมทราบว่ามีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) รัศมี 2 หน่วย
   1.1 ที่เมนู *กราฟ* เลือก *แสดงกริด*
   1.2 ลงจุดใดๆ ที่ห่างจากจุด (0,0) 2 หน่วย ในที่นี้เลือกจุด P(2,0)
   1.3 คลิกที่เมนู *กราฟ* เลือก *ลงจุด* แล้วใส่พิกัด (2,0) คลิก *วาด*
   1.4 คลิกเลือก จุด (0,0) และ จุด (2,0) ตามลำดับ
   1.5 ที่เมนู *สร้าง* เลือก *วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น*



รูปที่ 15

2. ลงจุด A(2,3) โดยคลิกที่เมนู *กราฟ* เลือก *ลงจุด* แล้วใส่พิกัด (2,3) คลิก *วาด*
3. สร้างเส้นสัมผัส L สัมผัสวงกลมที่จุด P โดยมีจุด A(2,3) เป็นจุดบนเส้นตรง L
   3.1 เลือกจุด P(2,0) และ A (2,3)
   3.2 ที่เมนู *สร้าง* เลือก *เส้นตรง* จะได้ดังรูปที่ 16



รูปที่ 16

4. โจทย์ต้องการหาความยาวของ PA ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หาคำตอบดังนี้

4.1 เลือกจุด P(2,0) และ A (2,3)

4.2 ที่เมนู *การวัด* เลือก *ระยะระหว่างพิกัด*

<u>วิธีทำ</u>

จากรูปที่วาดโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ดังรูปที่ 15 ระยะห่างระหว่างจุด P(2,0) และ A(2,3) มีระยะห่างดังนี้

$$PA = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$PA = \sqrt{(2-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$PA = \sqrt{9}$$

$$PA = 3$$

ดังนั้น ความยาวของ PA เท่ากับ 3 หน่วย

www.kroobannok.com

แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 3
เรื่อง ฝึกทักษะแก้โจทย์ปัญหาวงกลมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

คำชี้แจง จงหาสมการของวงกลมตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้ คะแนนเต็ม 20 คะแนน
(ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เขียนกราฟตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดช่วยในการหาคำตอบ)

1. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (—3,—5) และวงกลมนี้สัมผัสแกน X (2 คะแนน)

2. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (5,—3) และวงกลมนี้สัมผัสแกน Y (2 คะแนน)

3. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (3,4) และสัมผัสเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (2,1) และ (—2,4) (2 คะแนน)

www.kroobannok.com

4. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(0,4)$ และจุด $(0,-2)$ และจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้อยู่บนเส้นตรง $x-y=0$ (2 คะแนน)

5. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1,1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x+4y+3=0$ (2 คะแนน)

6. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y และวงกลมผ่านจุด $(-2,3)$ และ $(4,1)$ (2 คะแนน)

www.kroobannok.com

7. จงหาสมการวงกลมที่สัมผัสแกนทั้งสอง และผ่านจุด (1,2) (2 คะแนน)

8. วงกลมที่ผ่านจุด (6,3) และสัมผัสกับแกน X และแกน Y มีสมการเป็นอย่างไร (3 คะแนน)

9. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x-y+4=0$ และสัมผัสแกนทั้งสองแกน (3 คะแนน)

www.kroobannok.com

บรรณานุกรม

กรองทอง ไครีรี. (2553). **สนุกคิดกับคณิตศาสตร์และแอนิเมชันด้วย GSP: The Geometer's Sketchpad**. กรุงเทพ ฯ: เอทีม บิสซิเนส.

กวิยา เนาวประทีป. (2547). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ ภาคตัดกรวย**. กรุงเทพ ฯ: สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซนเตอร์.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2550). **คัมภีร์คณิตศาสตร์ ม.4 ภาคเรียนที่ 2 ฉบับปราบมาร**. กรุงเทพ ฯ: ธนธัชการพิมพ์.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2550). **1001 TESTS IN MATHS 1**. กรุงเทพ ฯ: เซเว่น พริ้นติ้ง กรุ๊ป.

ทิศนา แขมมณี. (2552). **ศาสตร์การสอน** (พิมพ์ครั้งที่ 11). กรุงเทพ ฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนกาญจน์ ภัทรากาญจน์. (2553). **คณิตสาระ ม.ปลาย เรขาคณิตวิเคราะห์** (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพ ฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพ ฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัวพรรณ เหล่าวานิชย์. (2544). **คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 2**. นนทบุรี: ไทเนรมิตกิจ อินเตอร์ โปรเกรสชีฟ.

สมัย เหล่าวานิชย์. (2544). **ตะลุยคลังข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย วิชาคณิตศาสตร์**. กรุงเทพ ฯ: อมรการพิมพ์.

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ. (2547). **20 วิธีจัดการเรียนรู้** (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพ ฯ: ภาพพิมพ์.

www.kroobaimak.com